

# 特異点付きアファイン極大曲面の特別なクラスと 極小曲面論との関係

東京科学大学 理学院 数学系 数学コース

松本 洵 (Jun MATSUMOTO) \*

## 概要

アファイン平均曲率が恒等的に消えるような 3 次元ユニモデュラーアファイン空間  $\mathbf{R}^3$  内の曲面はアファイン極大曲面とよばれ, 3 次元ユークリッド空間内の極小曲面のアファイン微分幾何学的類似物である. 本講演では, Aledo, Martínez, Milán が 2009 年に定義したアファイン極大写像と呼ばれる特異点付きアファイン極大曲面の大域理論について解説する. 特に, アファイン極大面という新たなサブクラスを定義し, 古典的な極小曲面論を用いて “完備” なアファイン極大面は Osserman 型の不等式を満たすことを示す. さらに, 極小曲面から得られるアファイン極大面の例についても紹介する.

## 1 準備

ここでは, 連結かつ向き付け可能な 2 次元多様体  $\Sigma$  に対して,  $C^\infty$  級写像  $f: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  のことを**曲面**とよぶ. また,  $p \in \Sigma$  において  $f$  がはめ込みでない, つまり,  $p$  における  $f$  の微分写像  $(df)_p: T_p \Sigma \rightarrow T_{f(p)} \mathbf{R}^3$  が単射でないとき,  $p \in \Sigma$  を曲面の**特異点**とよぶ (曲面についての基礎事項は例えば [24], 特異点をもつ曲面については [23] を参照).

### 1.1 3 次元ユークリッド空間内の極小曲面

3 次元ユークリッド空間  $\mathbf{R}^3 = (\mathbf{R}^3, dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$  へのはめ込みに対しては**平均曲率**が定義され, 平均曲率が恒等的に 0 になる曲面は**極小はめ込み**または**極小曲面**とよばれる. 極小曲面は閉じた針金で作った枠を石鹼液に浸したときに得られる石鹼膜の数学的モデルである (極小曲面については例えば [20], [13], [25], [1], [27] を参照). 極小曲面は次の Weierstrass の表現公式をもつ:

**事実 1.1** (Weierstrass の表現公式).  $\Sigma$  を Riemann 面 (1 次元複素多様体) とし,  $\Sigma$  上の有理型関数  $g$  と正則 1 次微分形式  $\omega$  が次を満たすとする (組  $(g, \omega)$  を **Weierstrass データ**とよぶ):

- (正則条件)  $(1 + |g|^2)|\omega|^2$  が  $\Sigma$  上のリーマン計量になる.

---

\* E-mail: matsumoto.j.d273@m.isct.ac.jp

- (周期条件)  $\Sigma$  内の任意の閉曲線  $C$  に対して,

$$\operatorname{Re} \int_C (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega = 0 \quad (1.1)$$

が成り立つ.

このとき, 任意の固定された点  $p_0 \in \Sigma$  に対して,

$$f(p) := \operatorname{Re} \int_{p_0}^p (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega : \Sigma \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad (1.2)$$

は (共形) 極小はめ込み<sup>\*1</sup>を与える. 特に,  $f$  の第一基本形式  $d\sigma^2$  は

$$d\sigma^2 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2 \quad (1.3)$$

で与えられる. 逆に任意の向き付け可能な (共形) 極小はめ込みは (1.2) の表示を持つ.

以下, 極小はめ込みはこの Weierstrass の表現公式で表されているとする. このとき, 極小はめ込み  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  のガウス曲率  $K_{d\sigma^2}$  と Gauss 写像  $\mathcal{G} : \Sigma \rightarrow S^2$  は次のように与えられる:

$$K_{d\sigma^2} = -\frac{4}{(1 + |g|^2)^3} \left| \frac{dg}{\omega} \right|^2, \quad (1.4)$$

$$\mathcal{G} = \left( \frac{2\operatorname{Re}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{-1 + |g|^2}{1 + |g|^2} \right) = \Pi^{-1} \circ g. \quad (1.5)$$

ただし,  $\Pi : S^2 \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  は原点を中心とする 2 次元単位球面  $S^2$  からの立体射影である. Gauss 写像の各点  $p \in \Sigma$  における値  $\mathcal{G}(p)$  は曲面の単位法線ベクトルとなる. 特に, Gauss 写像  $\mathcal{G}$  は, 立体射影を通して  $\Sigma$  上の有理型関数  $g$  と同一視できる. また, 極小はめ込みの全曲率  $C(\Sigma)$  とは

$$C(\Sigma) = \int_{\Sigma} K_{d\sigma^2} dA_{d\sigma^2} \in [-\infty, 0] \quad (1.6)$$

のことである. ただし,  $dA_{d\sigma^2}$  は第一基本形式に関する面積要素である.

上記の表現公式と複素解析を用いて極小曲面の様々な幾何学的性質や例が見出された. 特に, 有限全曲率である完備極小はめ込みに対して次のようなことが知られている.

**事実 1.2** ([5], [19]). 極小はめ込み  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が完備かつ有限全曲率ならば, あるコンパクト Riemann 面  $\overline{\Sigma}$  と  $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \overline{\Sigma}$  ( $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ ) が存在して,  $\Sigma$  は  $\overline{\Sigma} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  と双正則同値であり, Weierstrass データ  $(g, \omega)$  は  $\overline{\Sigma}$  上有理型に拡張される. このとき, 全曲率は  $C(\Sigma) = -4\pi \deg(g) \in -4\pi \mathbf{Z}_{\geq 0}$  で与えられる. ここで,  $\deg(g)$  は  $g : \overline{\Sigma} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  の次数で,  $g$  の  $\overline{\Sigma}$  内における極の位数の総和である.

ここで, 極小はめ込み  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が完備であるとは,  $\Sigma$  内の任意の発散路の第一基本形式  $ds^2$  に関する長さが  $\infty$  となる (つまり  $ds^2$  が  $\Sigma$  上の完備リーマン計量になる) ことをいう. ただし,  $\Sigma$  内の発散路とは曲線  $c : I \rightarrow \Sigma$  であって, 任意のコンパクト集合  $Q \subset \Sigma$  に対して, ある  $t_0 \in I$  が

---

<sup>\*1</sup> 以降, 簡単のため「共形」を省略する.

存在し、「 $t > t_0$  ならば  $\gamma(t) \notin Q$  となる」ものをいう。また、極小はめ込みが有限全曲率であるとは  $C(\Sigma) > -\infty$  となることである。

以下、 $f : \Sigma = \overline{\Sigma}_\gamma \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$  を有限全曲率である完備極小はめ込みとする。ただし、 $\overline{\Sigma}_\gamma$  はコンパクト Riemann 面で  $\gamma$  はその種数である。このとき、各  $p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) またはその十分小さい近傍の  $f$  による像を、**エンド**とよぶ。

**事実 1.3** (Osserman の不等式 [19]). 完備かつ有限全曲率である極小はめ込み  $f : \Sigma = \overline{\Sigma}_\gamma \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対して、次が成り立つ：

$$C(\Sigma) = \int_{\Sigma} K dA = -4\pi \deg(g) \leq 2\pi(\chi(\Sigma) - n). \quad (1.7)$$

ただし、 $\chi(\Sigma) = 2 - 2\gamma - n$  は  $\Sigma$  の Euler 標数である。さらに、(1.7) の等号成立条件はすべてのエンドが埋め込みとなることである。

**例 1.4.** Riemann 面  $\Sigma$  と  $\Sigma$  上定義される有理型関数  $g$  と  $\omega$  を次のように与えると、(1.2) によって極小はめ込みが得られる。

- (平面)  $\Sigma = \mathbf{C}, (g, \omega) = (0, dz)$ .
- (Enneper 曲面)  $\Sigma = \mathbf{C}, (g, \omega) = (z, dz)$ .
- (カテノイド (懸垂面))  $\Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0\}, (g, \omega) = (z, dz/z^2)$ .

3 次元 Lorentz-Minkowski 時空内の極大曲面、3 次元双曲空間内の平坦曲面や平均曲率 1 の曲面、3 次元 de-Sitter 時空の平均曲率 1 の曲面、次節で紹介するアファイン極大曲面など、Weierstrass 型の複素表現公式を持つような曲面は他にも存在し、複素解析を用いて多くの性質が明らかになっている。

## 2 特異点付きアファイン極大曲面

### 2.1 アファイン微分幾何学の基礎事項とアファイン極大はめ込み

ここでは、連結かつ向き付けられた 2 次元多様体  $\Sigma$  からユニモデュラーアファイン空間  $\mathbf{R}^3 = (\mathbf{R}^3, \det)$  への、曲面  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を考える。本節ではアファイン微分幾何学の基本的な用語とアファイン極大はめ込みの定義を説明する (詳細は [26], [10], [11])。今、曲面  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  がはめ込みであるとする。  $\xi$  を  $d\psi(T\Sigma)$  に横断的である  $\psi$  に沿ったベクトル場とすると、捩じれないアファイン接続  $\nabla$ , 対称双線形形式  $h$ , (1,1)-テンソル  $S$ , 微分 1 形式  $\tau$  が一意的に存在して次が成立する：

$$\begin{cases} D_X d\psi(Y) = d\psi(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi, \\ D_X \xi = -d\psi(S(X)) + \tau(X)\xi \end{cases} \quad (X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)) \quad (2.1)$$

ここで、 $D$  は  $\mathbf{R}^3$  の標準接続である。対称双線形形式  $h$  が正定値であるとき、はめ込み  $\psi$  は**局所強凸**であるといい、 $h$  を  $\xi$  に関する**アファイン計量**とよぶ。局所強凸なはめ込み  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対しては、横断的なベクトル場  $\xi$  を次を満たすように一意的に選ぶことができる：

$$\begin{cases} D_X \xi = -d\psi(S(X)), \\ \det(d\psi(X), d\psi(Y), \xi) = (h(X, X)h(Y, Y) - h(X, Y)^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (2.2)$$

(2.2) を満たす横断的ベクトル場  $\xi$  を **アファイン法線ベクトル場** とよび、アファイン法線ベクトル場  $\xi$  を 1 つ指定したはめ込み  $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を **Blaschke はめ込み** とよぶ。

以下、 $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  をアファイン法線ベクトル場  $\xi$  をもつ Blaschke はめ込みとする。このとき、以下を満たす写像  $N: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を **アファイン余法線写像** とよぶ：

$$\langle N, d\psi \rangle = 0, \quad \langle N, \xi \rangle = 1. \quad (2.3)$$

ただし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathbf{R}^3$  の標準内積である。以上の準備の下、Blaschke はめ込み  $\psi$  が **アファイン極大はめ込み**<sup>\*2</sup> であるとは、アファイン平均曲率  $(:= (1/2)\text{Trace}(S))$  が恒等的に 0 となることをいう。この意味で、アファイン極大曲面はユークリッド空間内の極小曲面のアファイン微分幾何的類似物である。また、アファイン極大はめ込みの特別な場合として、特に  $S \equiv 0$  となるものを **非固有アファイン球面** とよぶ。Blaschke はめ込み  $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  がアファイン極大はめ込みであることと、余法線写像  $N$  がアファイン計量  $h$  に関して調和、つまり、 $\Delta_h N$  を  $h$  に関するラプラシアンとするとき

$$\Delta_h N \equiv 0 \quad (2.4)$$

であることと同値である。

アファイン極大はめ込みは、局所的に平面領域上の関数  $\varphi(x, y)$  のグラフとして曲面を表示するとき、 $\varphi(x, y)$  は次の 4 階非線形偏微分方程式を満たすことが知られている：

$$\varphi_{yy}\rho_{xx} - 2\varphi_{xy}\rho_{xy} + \varphi_{xx}\rho_{yy} = 0, \quad \rho := (\det(\text{Hess } \varphi))^{-3/4}. \quad (2.5)$$

特に、そのグラフ曲面が非固有アファイン球面であるとき、 $\varphi(x, y)$  は次を満たす：

$$\det(\text{Hess } \varphi) = \varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = 1 \quad (2.6)$$

**例 2.1** (楕円放物面). 楕円放物面  $\psi(x, y) := (x, y, (x^2 + y^2)/2): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  はアファイン法線ベクトル場  $\xi = (0, 0, 1)$  をもつ非固有アファイン球面、特にアファイン極大はめ込みである。

ここで、アファイン計量に関する複素構造によって  $\Sigma$  を Riemann 面とみなし、さらに  $\Sigma$  が単連結であるとき、(2.4) から、 $\mathbf{C}^3$  に値をとる  $\Sigma$  上の正則写像  $\Phi: \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^3$  が存在して次を満たす：

$$N = \Phi + \bar{\Phi} = 2\text{Re}(\Phi), \quad (2.7)$$

$$h = -2i \det(\Phi + \bar{\Phi}, d\Phi, \bar{d}\bar{\Phi}), \quad (2.8)$$

$$\xi = \frac{\partial N \times \bar{\partial} N}{\det(N, \partial N, \bar{\partial} N)} = \frac{d\Phi \times \bar{d}\bar{\Phi}}{\det(\Phi + \bar{\Phi}, d\Phi, \bar{d}\bar{\Phi})}. \quad (2.9)$$

ただし、Riemann 面上の関数  $F$  と局所座標  $z$  に対して、 $\partial F = F_z dz$ ,  $\bar{\partial} F = F_{\bar{z}} d\bar{z}$  である。さらに、Leliuvre の公式によって、アファイン極大はめ込みは次の **Weierstrass 型の表現公式** で表される：

$$\psi = 2\text{Re} \left( i \int (\Phi + \bar{\Phi}) \times d\Phi \right) : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad (2.10)$$

<sup>\*2</sup> アファイン極大はめ込みを標語的にアファイン極大曲面と呼んでいる。

逆に Riemann 面  $\Sigma$  と  $\mathbf{C}^3$  に値をとる  $\Sigma$  上の正則写像  $\Phi$  が次を満たすとする:  $-2i \det(\Phi + \bar{\Phi}, d\Phi, \overline{d\Phi})$  が  $\Sigma$  上正定値であって,

$$(1) \Phi + \bar{\Phi} = 2 \operatorname{Re}(\Phi) : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ が 1 価写像,} \quad (2) \operatorname{Re} \left( i \int_C (\Phi + \bar{\Phi}) \times d\Phi \right) = 0. \quad (2.11)$$

ただし,  $C$  は  $\Sigma$  内の任意の閉曲線である.  $\Phi$  は一般に  $\Sigma$  上 1 価とは限らないことに注意せよ. このとき, (2.10) で定まる  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  は, (2.7) で定まる  $N$  をアファイン余法線写像, (2.8) で定まる  $h$  をアファイン計量, (2.9) で定まる  $\xi$  をアファイン法線ベクトル場とするアファイン極大はめ込みとなる. また, 「与えられた正則写像  $\Phi$  が (2.11) の (1) と (2) を満たすか?」という問題をアファイン極大曲面に関する**周期問題**とよぶ.

## 2.2 アファイン極大写像とその完備性

**事実 2.2** (アファイン Bernstein の定理, [9]).  $\mathbf{R}^3$  内の局所強凸かつアファイン完備 (i.e., アファイン計量  $h$  が完備) なアファイン極大はめ込みは楕円放物面に限る.

このアファイン Bernstein の定理によって, アファイン極大曲面の大域理論においては特異点を許容した曲面を考える必要がある. そこで, Aledo–Martínez–Milán が特異点付きアファイン極大曲面である次の概念を定義した.

**定義 2.3** ([2]). Riemann 面  $\Sigma$  と  $\mathbf{C}^3$  に値をとる  $\Sigma$  上の正則写像  $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^3$  に対して,  $h := -2i \det(\Phi + \bar{\Phi}, d\Phi, \overline{d\Phi})$  が恒等的には 0 ではないとし, (2.11) を満たすとする. このとき, (2.10) で定まる写像  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を**アファイン極大写像**とよび,  $\Phi$  をアファイン極大写像の**Weierstrass データ**とよぶ. また,  $N := \Phi + \bar{\Phi} : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $h$  をそれぞれアファイン極大写像の**余法線写像**, **アファイン計量**とよぶ.

アファイン極大写像の特異点はアファイン計量  $h$  が消える点に一致する. さらに Aledo–Martínez–Milán はアファイン極大写像に対して, Kokubu–Umehara–Yamada [8] の方法でアファイン完備性を拡張する形で次のように完備性を定義し, 完備アファイン極大写像に関する性質を示した.

**定義 2.4** ([3]). アファイン極大写像  $\Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が**完備**であるとは, コンパクトな台を持つ  $\Sigma$  上の対称  $(0, 2)$ -テンソル  $T$  が存在して,  $|h| + T$  が  $\Sigma$  上の完備リーマン計量となることである.

**事実 2.5** ([3]). アファイン極大写像  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が完備であるとき, あるコンパクト Riemann 面  $\bar{\Sigma}$  と有限個の点  $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \bar{\Sigma}$  ( $n \geq 1$ ) が存在して,  $\Sigma$  は  $\bar{\Sigma} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  と双正則同値になる.

この事実において, 各  $p_j$  またはその十分小さい近傍の  $\psi$  による像のことを, 完備アファイン極大写像の**エンド**とよぶ. 以下,  $\Sigma = \bar{\Sigma} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  とおき,  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  を完備アファイン極大写像とする. このとき, Weierstrass データ  $\Phi$  の微分  $d\Phi$  が各エンド  $p_j$  において有理型になるとき, そのエンドは**regular エンド**であるといい, すべてのエンドが regular エンドであるとき,  $\psi$  は**regular**であるという.

**事実 2.6** ([3]). 完備かつ regular なアファイン極大写像の Weierstrass データを  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$  とするとき、次が成り立つ：

- エンド  $p$  が埋め込まれたエンドであることと、 $d\Phi$  が  $p$  で 2 位の極をもち、さらにある  $j \in \{1, 2, 3\}$  が存在して  $d\Phi_j$  が 2 より小さい位数の極をもつことは同値である、
- (拡張版アファイン Bernstein の定理)  $\mathbf{R}^3$  内の完備かつ regular なアファイン極大写像がちょうど 1 つだけ埋め込まれたエンドをもつならば、そのアファイン極大写像は楕円放物面である。

### 3 主結果—アファイン極大面とその幾何学的性質

アファイン極大写像については、他の Weierstrass 型の表現公式を持つ曲面とは異なるいくつかの困難がある：

- 方程式 (2.5) が 4 階非線形であるため、解析的な扱いが難しい。
- アファイン極大写像を定める  $\mathbf{C}^3$  に値をとる Riemann 面上の正則写像  $\Phi$  が一般に多価であるため、 $(\Phi + \bar{\Phi}) \times d\Phi$  が多価となりさらに“正則”でないため周期問題を解くのが難しい。
- 曲面のある種の Gauss 写像を Riemann 面上の有理型関数とみなす方法が知られていない。

そこで本節では、アファイン極大写像の新たなサブクラスを定義し、その幾何学的性質を調べ、極小曲面の Weierstrass データから構成される例を与える。

#### 3.1 アファイン極大面

**定義 3.1** ([16]). アファイン極大写像  $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  であって、その余法線写像  $N = \Phi + \bar{\Phi}: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が (共形) 極小はめ込みであるようなものを **アファイン極大面** とよぶ。

アファイン極大面に対しては、余法線写像  $N = \Phi + \bar{\Phi}$  が極小はめ込みであることから、 $N$  はユークリッド空間内の極小曲面としての Weierstrass の表現公式 (事実 3.1) で表される。つまり、ある  $\Sigma$  上の有理型関数  $g$  と正則 1 次微分形式  $\omega$  が存在して、次のようになる：

$$N = \Phi + \bar{\Phi} = \operatorname{Re} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega \quad : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad (3.1)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \int (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g)\omega. \quad (3.2)$$

余法線写像  $N$  のことを **極小余法線写像** とよぶ。また、 $N$  の極小はめ込みとしての第一基本形式  $d\sigma^2$  と単位法線ベクトル場  $\nu$ 、および  $\psi$  のアファイン計量  $h$  は次のように与えられる：

$$d\sigma^2 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2 \quad (3.3)$$

$$\nu = \frac{N_z \times N_{\bar{z}}}{|N_z \times N_{\bar{z}}|} = \left( \frac{2 \operatorname{Re}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{2 \operatorname{Im}(g)}{1 + |g|^2}, \frac{-1 + |g|^2}{1 + |g|^2} \right) = \Pi^{-1} \circ g. \quad (3.4)$$

$$h = \langle N, \nu \rangle (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2 = \langle N, \nu \rangle d\sigma^2 \quad (3.5)$$

ただし、 $\Pi: S^2 \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  は単位球面  $S^2$  からの立体射影である。この  $\nu: \Sigma \rightarrow S^2$  は (アファイン

ン) Gauss 写像 ([10] を参照)  $\xi/|\xi| : \Sigma \rightarrow S^2$  と一致するため, 有理型関数  $g$  のことも (アファイン) Gauss 写像とよぶ. アファイン極大面の特異点は  $\langle N, \nu \rangle = 0$  となる点に一致する.

例 3.2 (楕円放物面).  $\Sigma \subset \mathbf{C}$  を単連結領域とし,

$$g = z, \quad \omega = dz$$

と定めると, この  $(g, \omega)$  から (3.1) から定まる極小余法線写像  $N : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  は平面であり, (2.10) から得られるアファイン極大面は楕円放物面となる.

なお, オリジナルの「極大面」は Lorentz-Minkowski 時空内の特異点付きの極大曲面に対して Umehara–Yamada [22] が定義した.

## 3.2 アファイン極大面の完備性

アファイン極大面  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が定義 2.4 の意味でアファイン極大写像として完備 (アファイン計量  $h$  に関する完備性) であるとき,  $\psi$  は完備であるという. 一方, アファイン極大面を考えると, アファイン計量  $h$  の他に極小余法線写像も第一基本形式  $d\sigma^2$  (3.3) をもつため, この計量に関する完備性も考えるのが自然である. これら 2 つの計量に関する完備性には次の関係がある.

**命題 3.3** ([16]). (1) アファイン極大面が完備ならば極小余法線写像  $N$  が極小はめ込みとして完備, つまり  $d\sigma^2$  は完備リーマン計量である.  
(2) アファイン極大面が完備かつ regular であることと, 極小余法線写像が極小はめ込みとして完備かつ有限全曲率で, アファイン極大面の特異点集合がコンパクトとなることが同値である.

(1) において逆は一般に不成立である (例 3.6 参照). よって,  $d\sigma^2$  が完備であるとき, アファイン極大面は弱完備であるという. また, 極小余法線写像  $N : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  の極小はめ込みとしての全曲率 (1.6) をアファイン極大面の全曲率と定める. したがって, アファイン極大面  $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が

$$\text{「完備」} \quad \text{または} \quad \text{「弱完備かつ有限全曲率」}$$

のいずれかであるとき, 前者の場合は事実 2.5, 後者の場合は Huber–Osseman の定理 (事実 1.2) から, コンパクト Riemann 面  $\overline{\Sigma}$  と  $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \overline{\Sigma}$  ( $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ ) が存在して  $\Sigma$  は  $\overline{\Sigma} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$  と双正則同値となる. よって, 有限全曲率かつ完備である極小はめ込みとしての極小余法線写像  $N : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  に対して Osseman の不等式 (事実 1.3) の議論が適用でき, 次が従う:

**定理 3.4** ([16]).  $\psi : \Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$  を完備かつ regular であるアファイン極大面とするとき次が成立する:

$$\int_{\Sigma} K_{d\sigma^2} dA_{d\sigma^2} = -4\pi \deg(g) \leq 2\pi(\chi(\Sigma) - n). \quad (3.6)$$

ただし, 積分はアファイン極大面の全曲率である. さらに, (3.6) の等号成立条件はすべてのエンドが埋め込みとなることである.

不等式 (3.6) は弱完備かつ有限全曲率であるアファイン極大面に対しても成り立つ. 2 節で述べた

ように、非固有アファイン球面はアファイン極大曲面のサブクラスであり、特異点付きの非固有アファイン球面をまたは**非固有アファイン波面**という ([14], [15]). 次の定理は、アファイン極大面が非自明な非固有アファイン波面を含まないサブクラスを与えていることを示している：

**定理 3.5** ([16]). 完備なアファイン極大面  $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  が非固有アファイン波面であるとき、 $\psi$  は楕円放物面 (例 2.1, 3.2) である. 特に、アファイン Gauss 写像が定値であるようなアファイン極大面は楕円放物面である.

### 3.3 アファイン極大面の例

極小曲面の Weierstrass データから構成されるアファイン極大面の例を紹介する (図 1, 2).

**例 3.6** ([16], Enneper 曲面型).

$$\Sigma = \mathbf{C}, \quad g = z, \quad \omega = dz. \quad (3.7)$$

から定まる極小余法線写像  $N: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  は Enneper 曲面である. この  $(g, \omega)$  から定まるアファイン極大面は弱完備であるが、特異点集合がコンパクトでないため完備でない.

**例 3.7** ([16], カテノイド型).

$$\Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0\}, \quad g = z, \quad \omega = \frac{dz}{z^2}. \quad (3.8)$$

から定まる極小余法線写像  $N: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  はカテノイドである. この  $(g, \omega)$  から定まるアファイン極大面は完備かつ regular である.

**例 3.8** ([16], 極小 Möbius の帯型).

$$\Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0\}, \quad g = z^2 \frac{z+1}{z-1}, \quad \omega = i \frac{(z-1)^2}{z^4} dz. \quad (3.9)$$

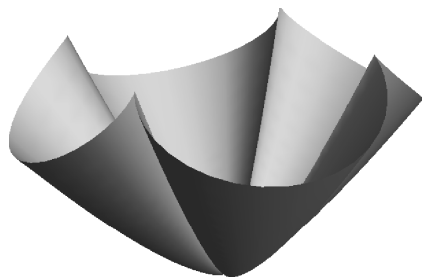
反正則対合  $I = -1/\bar{z}$  に対して  $I$ -不変な極小余法線写像  $N: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$  から誘導される向き付け不可能な極小はめ込み  $\tilde{N}: \Sigma/\langle I \rangle = \mathbf{RP}^2 \setminus \{1 \text{ 点} \} \rightarrow \mathbf{R}^3$  は極小 Möbius の帯である ([17]). 一方、この  $(g, \omega)$  から定まるアファイン極大面は  $\Sigma$  上 well-defined であるが  $I$ -不変でない.

**例 3.9** ([16], Miyaoka–Sato 型).

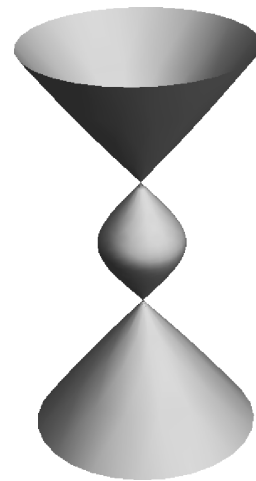
$$\Sigma = \mathbf{C} \setminus \{0\}, \quad g = \frac{z^n - a}{z^n - 1}, \quad \omega = \frac{(z^n - 1)^2}{z^m} dz. \quad (3.10)$$

ただし、 $m, n \in \mathbf{Z}_{\geq 2}, a \in \mathbf{C} \setminus \{0, \pm 1\}$  は  $n > m - 1 > 1$  かつ  $n \neq 2(m - 1)$  を満たす. この  $(g, \omega)$  から定まるアファイン極大面の全曲率は  $-4n\pi$  なので、任意に与えられた全曲率をもつアファイン極大面が存在することがわかる. なお、この  $(g, \omega)$  を Weierstrass データとするような極小はめ込みは Gauss 写像の除外値の数が 2 であるような例として Miyaoka–Sato [18] によって与えられた.



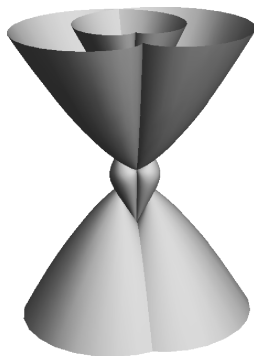


Enneper 曲面型

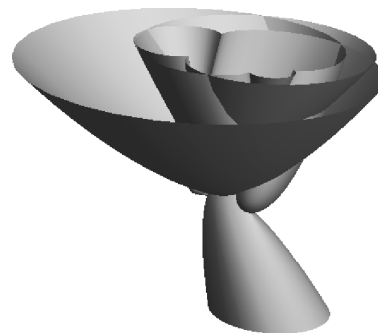


カテノイド型

図1 アフィン極大面の例 (1)



極小 Möbius の帯型



Miyaoka-Sato 型

図2 アフィン極大面の例 (2)

## 参考文献

- [1] A. Alarcón, F. Forstnerič, and F. J. López. Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2021.
- [2] J. A. Aledo, A. Martínez, and F. Milán. Affine maximal surfaces with singularities. *Results Math.*, **56**:91–107, 2009.
- [3] J. A. Aledo, A. Martínez, and F. Milán. An extension of the affine Bernstein problem. *Results Math.*, **60**:157–174, 2011.
- [4] C. J. Costa. Examples of complete minimal immersion in  $R^3$  of genus one and three embedded ends. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **15**:47–54, 1984.
- [5] A. Huber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.*, **32**:13–72, 1957.
- [6] D. Hoffman and W. H. Meeks III. Embedded minimal surfaces of finite topology. *Ann. of*

- Math., **22**:203–221, 1990.
- [7] L. P. Jorge and W. H. Meeks, III, The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature, *Topology*, **22**:203–221, 1983.
  - [8] M. Kokubu, M. Umehara, and K. Yamada. Flat fronts in hyperbolic 3-space. *Pacific J. Math.*, **216**:149–175, 2004.
  - [9] A. M. Li and F. Jia. The Calabi conjecture on affine maximal surfaces. *Results Math.* **40**, 265–272, 2001.
  - [10] A. M. Li, U. Simon, and G. S. Zhao, *Global affine differential geometry of hypersurfaces*, volume 11 of *De Gruyter Expositions in Mathematics*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.
  - [11] A. M. Li, U. Simon, G. Zhao, and Z. Hu, *Global affine differential geometry of hypersurfaces*, volume 11 of *De Gruyter Expositions in Mathematics*, De Gruyter, Berlin, extended edition, 2015.
  - [12] F. J. López. The classification of complete minimal surfaces with total curvature greater than  $-12\pi$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 334, No. 1, pp. 49–74, 1992.
  - [13] F. J. López and F. Martín. Complete minimal surfaces in  $\mathbf{R}^3$ . *Publ. Mat.* **43**:341–449, 1999.
  - [14] A. Martínez. Improper affine maps. *Math. Z.*, **249**:755–766, 2005.
  - [15] J. Matsumoto. The classification of complete improper affine spheres with singularities and new examples. arXiv:2403.16434, to appear in *Kodai Math. J.*, 2026.
  - [16] J. Matsumoto. A class of affine maximal surfaces with singularities and its relationship with minimal surface theory. *Results Math.* **81**, 2026.
  - [17] W. H. Meeks, III. The classification of complete minimal surfaces in  $\mathbf{R}^3$  with total curvature greater than  $-8\pi$ . *Duke Math. J.*, 48(3):523–535, 1981.
  - [18] R. Miyaoka and K. Sato. On complete minimal surfaces whose Gauss maps miss two directions, *Arch. Math. (Basel)* **63**:565–576, 1994.
  - [19] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in  $E^3$  and  $E^n$ , *Ann. of Math.* **80**, 340–364, 1964.
  - [20] R. Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Van Nostrand Reinhold Co., New York-London-Melbourne, 1969.
  - [21] R. M. Schoen, Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces, *J. Differential Geom.*, **18**:791–809, 1983.
  - [22] M. Umehara and K. Yamada. Maximal surfaces with singularities in Minkowski space. *Hokkaido Math. J.*, 35(1):13–40, 2006.
  - [23] 梅原雅顕, 佐治健太郎, 山田光太郎. 特異点を持つ曲線と曲面の微分幾何学. 丸善出版, 2017.
  - [24] 梅原雅顕, 山田光太郎. 曲線と曲面—微分幾何学的アプローチ— (改訂版). 裳華房, 2015.
  - [25] 川上裕, 藤森祥一. 極小曲面論入門—その幾何学的性質を探る—. サイエンス社, 2019.
  - [26] 野水克己, 佐々木武. アフライン微分幾何学 —アフラインはめ込みの幾何—. 裳華房, 1994.
  - [27] 宮岡礼子. 極小曲面. 共立出版, 2022.